数理解析研究所講究録
301巻 1977年 21-31

「×3+1)÷2」問題の実験と理論的考察

東大理(情報科学科) 米田信夫

0. 問題提起

0も含めた自然数の全体を $\mathbb{N}$ とし, $\mathbb{N}_r=\{n\in\mathbb{N}\mid n\geq r\}$ とする。写像 $\varphi:\mathbb{N}_1\to\mathbb{N}_1$ を

$n\mapsto$ <u>if</u> 2 <u>divides</u> n <u>then</u> $n/2$ <u>else</u> $n\times3+1$ <u>fi</u>

として定める。$n=1$ からこの写像を重ねて行くと, $1\mapsto4\mapsto2\mapsto1$ というループができるが, どんな $n\in\mathbb{N}_1$ から始めても, φ を重ねて行けば究極的には, このループに落ちるらしい。すなわち, 写像の k 回合成を k 乗巾のように記すものとして,

$P_\infty:(\forall n\in\mathbb{N}_1\mid P(n):(\exists k\in\mathbb{N}\mid\varphi^k(n)=1))$

ということが予想される。実際 $n=2,3,4,\cdots$ に対して $P(n)$ を

$x:=n;$ <u>while</u> $x>1$ <u>do</u> $x:=\varphi(x)$ <u>od</u>

という具合に調べて見ても, なかなか反例は見つからない。

この問題は, 日本には1969年Yale大学から来日された角谷静夫氏によって伝えられ, 折しもAlgol 68に対抗して日本からAlgol Nを提言するmission となった筆者に, 立大の岩村聯氏が羽田で教えて下さった。その後島内剛一氏によって「bit」誌1969年10月号に紹介され, また他方, 慶大の浦昭二氏の最近翻訳された書物[Nievergelt, Farrar, and Reingold: Computer approaches to mathematical problems (1974, Prentice-Hall)]にも, 紹介と若干の考察が述べられている。

この問題は, いろいろな方向から攻究されているようである。就中, 早大の廣瀬健・足立恒雄 両氏は興味ある結果をお持ちのようであるが, それについては別の所で触れることにしたい。ここでは若干の理論的考察と, 学習院大

学のTOSBAC 40Cによる実験の結果について述べる．$\mathbb{N}_r^m=\{n\in\mathbb{N}\mid r\leqq n\leqq m\}$ と約束して，実験結果を端的に云えば，

$$P_m:(\forall n\in\mathbb{N}_1^m\mid P(n))$$

が，$m=7$千億$=0.7\times 10^{12}$ 程まで確かめられた，ということである．

1. 予備的考察

①奇数 n に対する $\varphi(n)=3n+1$ は偶数であるから，$\varphi^2(n)=(3n+1)/2=n+\lfloor n/2\rfloor+1$．そこで φ を

$$\psi: n\mapsto \underline{\text{if}}\ 2\ \underline{\text{divides}}\ n\ \underline{\text{then}}\ n/2\ \underline{\text{else}}\ (3n+1)/2\ \underline{\text{fi}}$$

に変えて

$$P(n):(\exists k\in\mathbb{N}\mid\psi^k(n)=1)$$

としても，前の $P(n)$ と同等であり，φ より ψ の方が追跡しやすい面を持っているので，以下ではもっぱら ψ について考えることにする．

②個々の $n\in\mathbb{N}_1$ について独立に $P(n)$ を調べるのは能率が悪い．そこで，$P(n)$ の確かめられた n の集合を，なんらかの仕方で管理し，増殖させて行くようなことが考えられる．たとえば，

$$\psi^{-1}(n)=\underline{\text{if}}\ n\ \underline{\text{mod}}\ 3=2\ \underline{\text{then}}\ \{2n,(2n-1)/3\}\ \underline{\text{else}}\ \{2n\}\ \underline{\text{fi}}$$

に従って，$S_0=T=\{1\}$ から始め，$i=1,2,3,\cdots$ に対して順次に

$$S_i=\bigcup_{n\in S_{i-1}}\psi^{-1}(n)\ ;\quad T:=T\cup(S_i\cap\mathbb{N}_1^m)$$

と，相当大きな数 m を目標にして，構成・蓄積して行く．但し S_2 から 1 を取除いておく．この方式は，m を 10^{10} の程度に設定した場合，データ管理上の overhead が大きな障害となる．他方，情報の利用効率は悪いが，$P(n)$ の確かめられた n の集合として $\mathbb{N}_1{}^m=\{n\in\mathbb{N}_1\mid n\leqq m\}$ の形のものを管理して行くこと，いいかえれば，P_m と同等な式として，

Q_m: $(\forall n \in \mathbb{N}_2{}^m \mid Q(n): (\exists k \in \mathbb{N}_1 \mid \psi^k(n) < n))$

を調べて行く，という方式は，データの管理が非常に簡単であるという利点を持っている．それで，以下では原問題をすりかえて

Q_∞: $(\forall n \in \mathbb{N}_2 \mid Q(n): (\exists k \in \mathbb{N}_1 \mid \psi^k(n) < n))$

としたものを考えて行くことにしよう．

③偶数 n に対しては，$\psi(n) = n/2 < n$ だから，$Q(n)$ は自明である．$n \,\underline{\mathrm{mod}}\, 4 = 1$ の場合は，$n = 4a+1$ として，$\psi(n) = 6a+2$，$\psi^2(n) = 3a+1 < n$ となり，$Q(n)$ が成立する．従って $n \,\underline{\mathrm{mod}}\, 4 = 3$ となる n についてだけ，$Q(n)$ を調べて行けば十分である．

④上の考え方を進めて行くと，一般に $n \,\underline{\mathrm{mod}}\, 2^k$ によって $\psi(n)$，$\psi^2(n)$，…，$\psi^k(n)$ までの成行きが定まることが知られる．$n \,\underline{\mathrm{mod}}\, 2^k = b$，$n = 2^k \cdot a + b$ のとき，$\psi^k(n) = 3^l \cdot a + c$ の形で，l，c は k と b によって定まり，a には無関係である．k と b $(0 \leqq b < 2^k)$ との関数 $l = l(k, b)$ と $c = c(k, b)$ とは，次のようにして再帰的に定められる．

$$l(0,0) = 0, \quad c(0,0) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}
l(k+1, b) = \text{if } c(k,b) \ \underline{\text{iseven}} \ \underline{\text{then}} \ l(k,b) \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\text{else}} \ l(k,b)+1 \ \underline{\text{fi}} \\
l(k+1, 2^k+b) = \text{if } c(k,b) \ \underline{\text{isodd}} \ \underline{\text{then}} \ l(k,b) \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\text{else}} \ l(k,b)+1 \ \underline{\text{fi}} \\
c(k+1, b) = \psi(c(k,b)) \\
c(k+1, 2^k+b) = \psi(3^{l(k,b)} + c(k,b))
\end{array}\right\} \begin{array}{l}(0 \leqq b < 2^k, \\ k = 0, 1, 2, \cdots)\end{array}$$

このようにして，$n \mapsto \psi(n) \mapsto \psi^2(n) \mapsto \cdots \mapsto \psi^k(n)$ という k 段のステップ中で，どこが l のふえるステップであるかというパターン（2^k 通り）は

$n \bmod 2^k$ と1つの b (2^k通り) と全単射的に対応する。ここで、

$$2^k > 3^{l(k,b)}$$

となる k, b の組については(実際には起こらない有限個の例外を除いて)

$$n > \psi^k(n) \quad \text{すなわち} \quad Q(n)$$

が保証されるので、そういう k, b の組については、$n \bmod 2^k = b$ となる n は $Q(n)$ を験証しないでよいことになる。$k=1$ から始めて、2進法の下位 k ビットがそのような b になるものを捨てて行くと

k	捨てる b	残る b
1	0	1
2	01	11
3	ϕ	011, 111
4	0011	1011, 0111, 1111
5	01011, 10111	11011, 00111, 01111, 11111
⋮		⋮

という具合になる。この捨てる b の個数、残る b の個数の計算は、2項係数で作るパスカルの3角形において、$(3/2)^{k-r}/2^r < 1$，すなわち $\frac{r}{k} > 1 - \log_3 2 \fallingdotseq .3690702$ となる k, r の組合せの部分を強制的に0にしたものを作ると、その第 k 行の和が残る b の個数である。例えば、

mod 2^{10} での場合、1024中 64個の b だけ調べれば良いわけである。(残る b の個数)/2^k は $Ce^{-0.0414k}$ 位の0に向かっての減衰を示す。そういう意味では、$Q(m)$ は殆んど全ての m について成り立つとも云えるが、例外なしという保証にはならない。

	残
1	
1 0	1
1 0	1
1 1 0	2
1 2 0	3
1 3 0	4
1 4 3 0	8
1 5 7 0	13
1 6 12 0	19
1 7 18 12 0	38
1 8 25 30 0	64
1 9 33 55 30 0	128
1 10 42 88 85 0	226
1 11 52 130 173 0	367
1 12 63 182 303 173 0	734
1 13 75 245 485 476 0	1295
1 14 88 320 730 961 0	2114
1 15 102 408 1050 1691 961 0	4228

以下では ψ が ×3+1)÷2 となるステップを T ステップ、÷2 となるステップを D ステップと呼ぶ。

2. 計算機実験

1971年頃から筆者は，占有できる計算機が得られる度に，より大きい m まで Q_m を調べる実験をして来た．実をいうと，筆者自身この問題に余り理論的に深入りする興味を持っているわけではないのだけれども，折角ある計算機を夜も遊ばせないように利用し，かつ，耐久テストをする，というようなつもりで，やって来たのである．最初は，プログラマブル電卓 SOBAX 2700 で，m の増分にして日産 3×10^3 位だったと思う．次は 8 ビット・レジスタのミニコン TOSBAC 10 で日産 3×10^5 位，そして 1976年春からは，16ビット・レジスタ×16 の TOSBAC 40C で，日産 1.15×10^9 位の割合で進行しており，6月7日現在では，16進で A7 15F4 4E67 $\overset{10進}{=}$ 7176 2721 5463 まで調べられた．

表1，2 は，これまでに得られた2種類の記録を並べたものである．表1は，N から出発したときの $M = \max_k \psi^k(N)$ を，N について新記録が出る度に記したもので，M は略 N^2 のオーダになっている．表2は N から出発して，はじめて $\psi^k(N) < N$ となるまでの T ステップの個数を，N についての新記録又はタイ記録が出る度に記したもので，$\log N$ のオーダの様にも見えるが，最後の記録'345回'は，そこの N の 50倍位まで進行した現在も，未だ更新されていない．なお，表1，2 では（TESTED UP TO 9F ----）となっているが，上記の A7 --- までには，追加すべき記録は出ていない．

図1，2 は広島大学の西村和夫氏に見せて頂いた実験を真似して見たもので，n から 1 に落ちるまでの φ ステップ数のヒストグラムである．同じ値がならぶ傾向が見られるが，これは $\psi^3(8m+4)=\psi^3(8m+5)$，$\psi^5(32m+4)=\psi^5(32m+5)=\psi^5(32m+6)$，$\psi^5(32m+22)=\psi^5(32m+23)$ 等，同ステップで合流するものの所為であろう．

表1

"3N+1" PROBLEM.
TABLE OF HEIGHT RECORDS
N=INITIAL INTEGER (HEX)
(TESTED UP TO 9FA3311ACF)
M=LARGEST VALUE ATTAINED FROM N (HEX)

N	M
1B	1208
2BF	1 E944
71B	9 BE04
109F	33 F50C
11EF	3E 350A
25BF	CE DDDC
67FF	32B 7282
EE2F	11AE 5C58
1 2F67	2ED0 7110
1 BAE7	49F9 01BA
2 6EFF	2 00AB BA0C
12 7FFF	10 41CC 0CD4
28 F6E7	29 0CD4 69E8
2E 6767	48 7E70 8D9A
3B 1AFF	63 F2F0 1D94
46 C51B	99 875F 044A
56 4E7F	118 D9E9 9AF0
61 E8EF	22E CB0E 71EC
65 30FB	1B70 CDF1 C068
12B A87F	8B49 A786 1694
4C5 74EF	3 E1B0 38DC 43DA
C93 0F9F	B 6090 85D2 D2F8
130F D59F	9D0 3047 1593 8FA8
540C C8A7	3172 1D61 DF33 BA60
1 FC5B 6D67	7DE7 467B 0D3E DD84
2 DECB BFFF	8FCA 6002 A586 D6A8
5 5D06 67FF	1 DDA9 215F 6616 E8F0
A AE2E 989F	2 3B5C 26B4 B080 93AA
C 0BE7 9EFF	3 1B78 DE33 A857 98B4
D C5C5 AC1F	4 1B3C EEEC 507F 1E64
D D6AB 74EF	5 9395 3E0C 3C0A D984
10 54BE AFFF	B 690B CFCE 3B3E D624
12 0F50 C3BF	18 D847 D2C2 BEC0 6D98
19 AB00 1EFF	25 334F 6D5A CEEF EA64
2F 9903 9AFF	26 5C58 306F 4310 0478
35 FF22 B2EF	3B 5E90 3B70 F6BF F44A
3F 55FE 2C7F	252 EA33 054B C8B4 3D72
67 F900 E67F	42F 8D36 D309 8F2C 0DC8
84 35E4 AF67	AA5 2598 5800 5E13 F72A
-- ---- ----	--- ---- ---- ---- ----

表2

"3N+1" PROBLEM.
TABLE OF DURATION RECORDS
N=INITIAL INTEGER (HEX)
(TESTED UP TO 9FA3311ACF)
K=NO. OF "*3+1" STEPS UNTIL
IT GETS < N

N	K
1B	37
2BF	51
57F	51
2767	66
8B47	85
4 1FBF	103
5 8767	104
5 D31F	109
9 8E9B	111
F AD67	115
11 2E7F	141
7B 69FF	155
CC CC67	181
13A EA7F	184
197 A9FF	188
364 9B1B	194
3CC 69FF	237
CFA 72EF	249
4795 AE2F	251
6CEB DFBF	273
1 186D 04EF	276
1 75E6 B13F	277
2 D944 34EF	345
3 6050 D667	345
-- ---- ----	---

図1

×3+1)÷2 の 1になるまでのステップ数(φ)

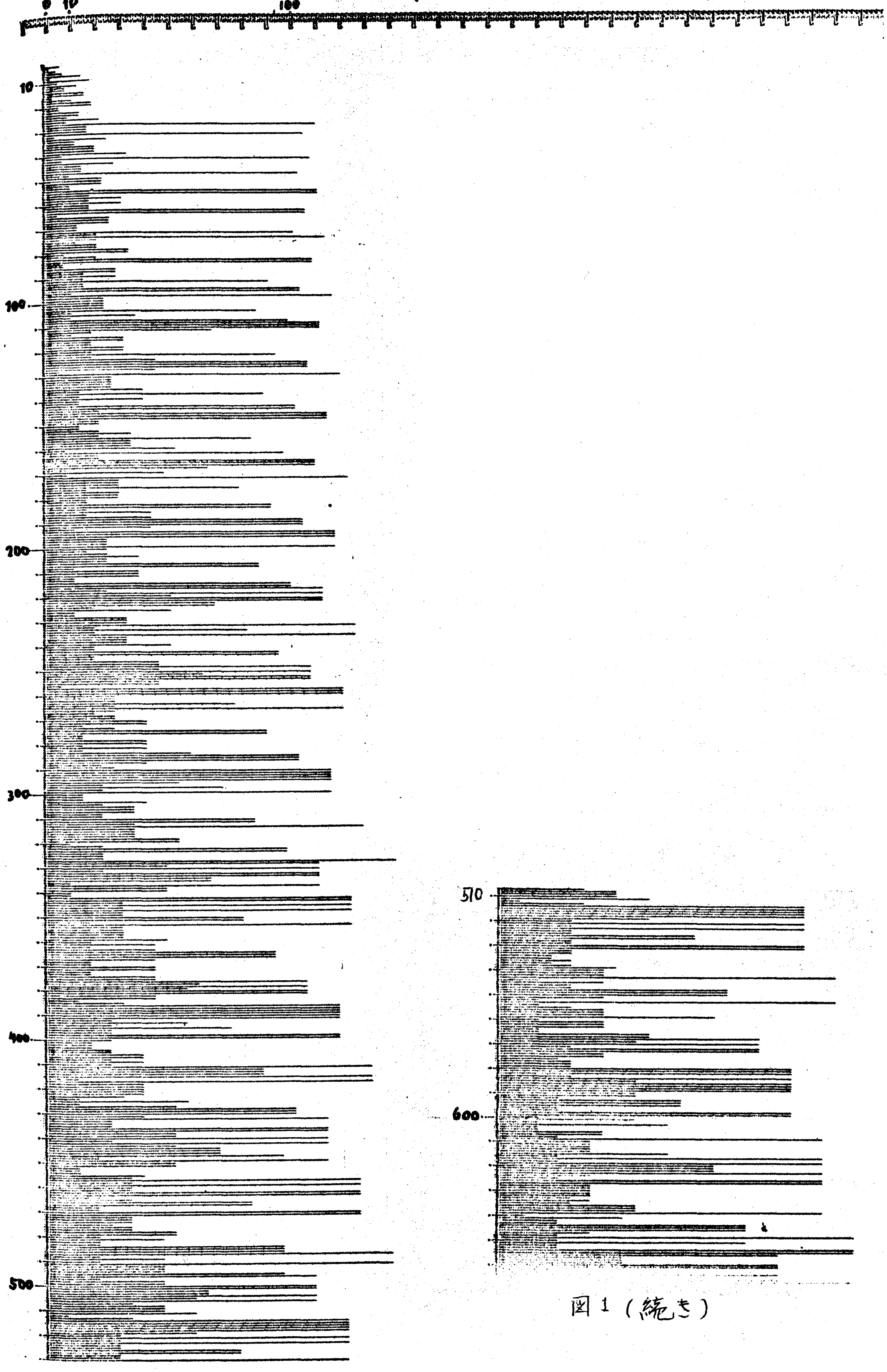
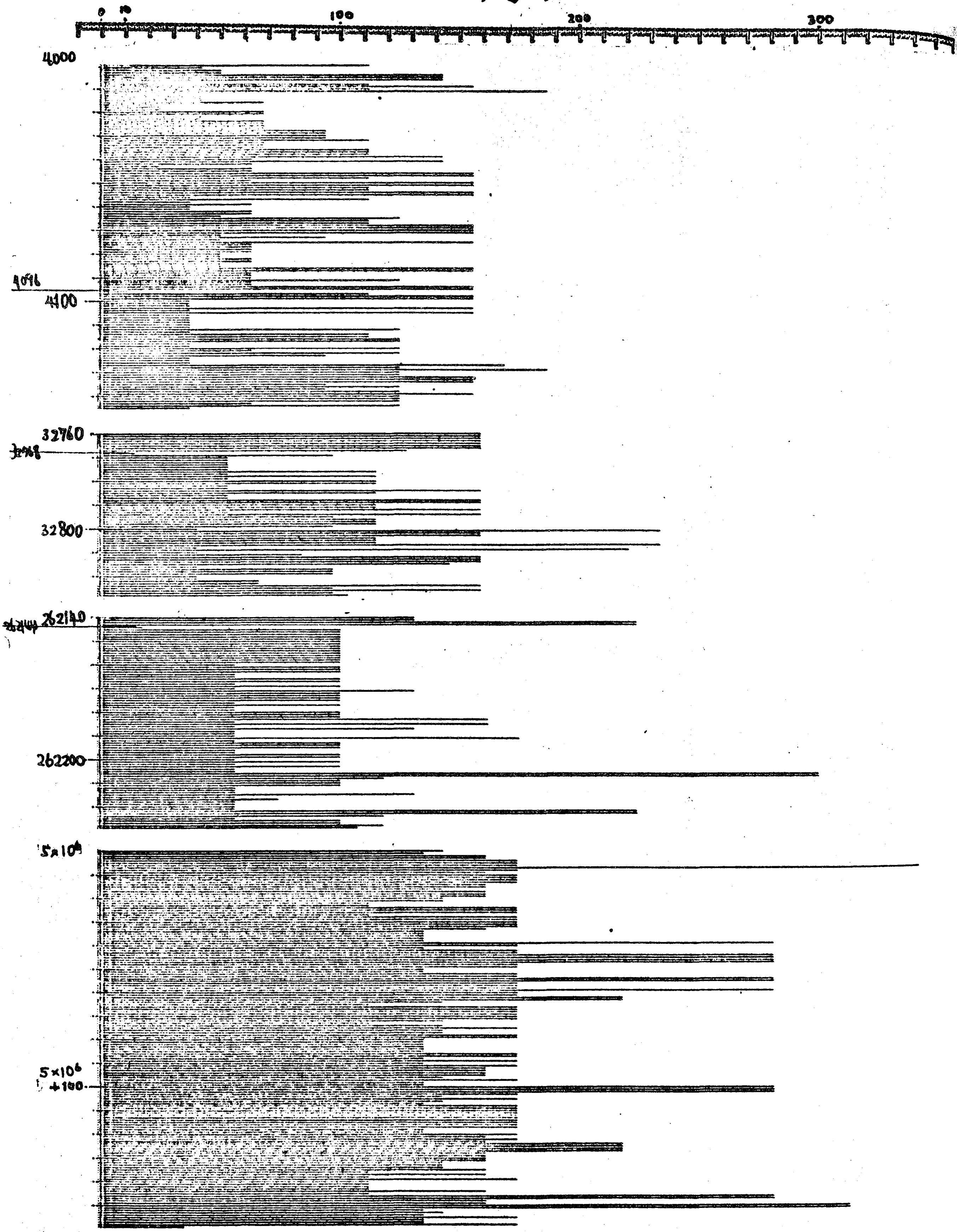


図1(続き)

図2
×3+1)÷2 の 1に至るまでのステップ数(φ)



3. ループの非存在に対応する整数論的問題

この問題に反例があるとすれば、 $\{\psi^m(n) \mid m \in \mathbb{N}\}$ が非有界（無限集合）となる n が存在するか、あるいは、3以上の奇数 n で、ある回数 m で $\psi^m(n)=n$ となる（ループができる）ものが存在するか、ということになる。

仮に、そういうループ $\psi^m(n)=n$ があったとすると、m回のψステップ中にTステップ$[\times 3+1)\div 2]$がl回あったとし、各Tステップはそれぞれの後にm_1-1回，m_2-1回，…，m_l-1回のDステップ$[\div 2]$を従えたものとすると、T, Dを右からの作用子と考えて $n\underbrace{TD^{m_1-1}\,TD^{m_2-1}\cdots TD^{m_l-1}}_{\text{Tが}l\text{回}}=n$,
すなわち、

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{n\cdot 3+1}{2^{m_1}}\cdot 3+1}{2^{m_2}}\cdot \cdots\cdots \cdot 3+1}{2^{m_l}} = n \tag{1}$$

両辺に $2^m = 2^{m_1+m_2+\cdots+m_l}$ を掛けると

$$n\cdot 3^l + 3^{l-1} + 3^{l-2}\cdot 2^{m_1} + 3^{l-2}\cdot 2^{m_1+m_2} + \cdots + 3^0\cdot 2^{m_1+m_2+\cdots+m_{l-1}} = n\cdot 2^m$$

従って、$k_0=0,\ k_1=m_1,\ k_2=m_1+m_2,\ \ldots,\ k_{l-1}=m_1+m_2+\cdots+m_{l-1},\ k_l=m$
とおいて、

$$n = \frac{\sum_{j=0}^{l-1} 3^{l-1-j}\cdot 2^{k_j}}{2^{k_l}-3^l} \quad (0=k_0<k_1<\cdots<k_{l-1}<k_l) \tag{2}$$

逆に、(2)の右辺の形で分子が分母で整除されるような l と k_j が存在すれば、その商 n からは、上記のようなT, Dステップのパターンを経て、ループができる。すなわち

$$L:\ \neg\left(\exists l \geqq 2,\ 0=k_0<{}^{\exists}k_1<{}^{\exists}k_2<\cdots<{}^{\exists}k_l \ \middle|\ (2^{k_l}-3^l)\ \underline{\text{divides}}\ \sum_{j=0}^{l-1} 3^{l-1-j}\cdot 2^{k_j}\right)$$

という整数論的命題が、ループの非存在と同値である。

この整数論的問題は，一般的に解決することは難かしいとしても，t_j の分布の特別な場合には，解決されているものもあるようである（早大 廣瀬 健氏による）．解決された t_j の分布のパターンの種類を，少しづつでも殖やして行くことが出来れば良いかと思っている。

4. ある拡張問題（研究集会では触れなかったが，参考として記す）

$p \in \mathbb{N}_2$，d は整数 $\geqq -1$ として，$\psi_{p,d} : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ を

$$n \mapsto \text{if } p \ \underline{\text{divides}}\ n \ \underline{\text{then}}\ n/p \ \underline{\text{else}}\ n + \lfloor (n+d)/p \rfloor \ \text{fi}$$

として定義する．今までの ψ は $\psi_{2,1}$ であるが，このように拡張したものについても，同様な問題が考えられる．$p > d \geqq 0$ として調べて見た結果を次に掲げる．(p, d)-問題で調べた n の範囲，ループの根（あれば \$ で示す）は p 進法で記した．たとえループがある場合でも，ループは高々数個しかないようである．$(2, 1)$-問題の延長である $(p, 1)$-問題に $p = 13, 14$ で初めて反例がでることは興味深い。

(2,0)	101\$, 10001\$.	100 01010 01000 00001 まで
(3,0)	211\$.	10 12112 10001 まで
(3,1)		2 21010 01011 までなし
(3,2)	21\$.	111 10210 21122 22101 まで
(4,0)	102\$.	3133 33033 まで
(4,1)		1332 10002 までなし
(4,2)	21\$.	2232 12213 まで
(4,3)	113\$	1 10030 13301 まで
(5,0)	212\$	143 42212 まで
(5,1)		333 33311 までなし

(5,2) 42$. 1022 44203 まで

(5,3) 133$. 404 33223 まで

(5,4) 13 34404 11141 までなし

(6,0) 213 23125 までなし

(6,1) 34 05211 までなし

(6,2) 302 12021 までなし

(6,3) 102 30403 までなし

(6,4) 143 00213 までなし

(6,5) 35$, 224$, 35 12031 まで

(7,0) 36 64241 までなし

(7,1) 51 42333 までなし

(7,2) 104 05255 までなし

(7,3) 41 45011 までなし

(7,4) 6335$. 26 52114 まで

(7,5) 32$, 34$. 52 11426 まで

(7,6) 13 56604 までなし

(8,0) 134$ 1 74224 まで

(8,1) ? までなし

(8,2) 1 01233 〃

(8,3) 2 07151

(8,4) 2 25441

(8,5) 2 15226

(8,6) 1 74545

(9,0) 332$

(9,1) ? までなし

(9,2〜8) ?

(10,0) 44699 までなし

(10,1) ? までなし

(10,2〜9) ?

(11,0) 251A8 までなし

(11,1) ? までなし

(11,2〜10) ?

(12,0) 21$, 53$

(12,1) ? までなし

(12,2〜11) ?

(13,0) B4$, 2929 まで

(13,1) B4$. 4A82 まで

(13,2〜12) ?

(14,0) C13D までなし

(14,1) 87$

(14,2〜13) ?

(15,1) ? までなし

(16,1) 〃

(17,1) 〃

(18,1) 〃

(19,1) 〃

(20,1) 〃